10 класс

Задача 1. Два осколка. Снаряд вылетел из ствола пушки с начальной скоростью υ_0 под углом α к горизонту. На некоторой высоте он разорвался на два одинаковых осколка, которые упали на землю одновременно. Расстояние между упавшими осколками равно L. Место старта снаряда и места падения осколков лежат на одной прямой. Найдите расстояние S от места расположения пушки до места падения дальнего осколка. Сопротивление воздуха не учитывайте. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: $S = \frac{L}{2} + \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Возможное решение и критерии оценивания.

1. Если бы снаряд не разорвался, то он упал бы от места выстрела на расстоянии $S_0 = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. (2 балла)

Данную формулу можно вывести, если расписать движение в горизонтальном и вертикальном направлениях в проекциях на соответствующие оси.

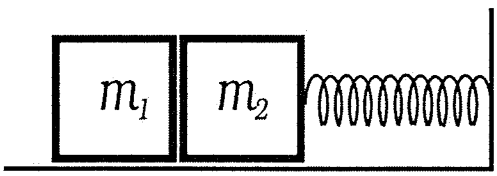
2. Перейдём в систему центра масс, которая движется вдоль оси Ox со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$. В системе центра масс ЗСИ для осколков в проекции на ось Ox запишется в виде: $0 = m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}$. Так как массы осколков равны, то $\upsilon_1 = \upsilon_2$. (1 балл)

3. По условию задачи время падения осколков $t_1 = t_2$ одинаково, значит, в системе центра масс скорости осколков направлены горизонтально и осколки за время падения отлетят от положения центра масс на одинаковое расстояние $L_1 = \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 = L_2$. (1 балл)

4. Расстояние между осколками равно L связано с их скоростями формулой: $L = L_1 + L_2 = 2L_1$, откуда $L_1 = L/2$. (1 балл)

5. Расстояние от пушки до места падения дальнего осколка равно $S = S_0 + L_1 = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{L}{2}$. (1 балл)

Задача 2. Два кубика. На гладкой поверхности вплотную друг к другу лежат два кубика массы которых m_1 *и* m_2. Один кубик соединен со стеной с помощью пружины, при этом пружина не деформирована. Кубик массой m_2 смещают к стене и отпускают. Найдите отношение максимальной энергии E_A деформации пружины после столкновения кубиков в случае упругого удара к максимальной энергии E_B деформации пружины в случае неупругого удара. Считайте, что в случае неупругого удара кубики не слипаются. Рассмотрите частный случай $m_2 = m_1/2$.



Ответ:. $E_A / E_B = 1$.

Возможное решение и критерии оценивания. Направим горизонтальную ось OX влево.
1) В случае упругого столкновения кубиков закон сохранения энергии и закон сохранения импульса дадут: $\frac{m_2\upsilon_0^2}{2}=\frac{m_2\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}$; (0,5 балла)

$$m_2\upsilon_0=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2. \qquad (0,5 \text{ балла})$$

Преобразуем эти уравнения к виду: $m_2\left(\upsilon_0-\upsilon_2\right)\left(\upsilon_0+\upsilon_2\right)=m_1\upsilon_1^2$. (1)

$$m_2\left(\upsilon_0-\upsilon_2\right)=m_1\upsilon_1. \qquad (2)$$

Разделив уравнение (1) на уравнение (2) получим: $\upsilon_0+\upsilon_2=\upsilon_1$. (3)

Решая совместно уравнения (2) и (3) найдём скорость второго кубика после столкновения:

$$\upsilon_2=\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)\upsilon_0. \qquad (1 \text{ балл})$$

Максимальной энергии E_A деформации пружины после столкновения кубиков в случае упругого удара равна кинетическая энергия второго кубика после столкновения:

$$E_A=\frac{m_2\upsilon_0^2}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)^2. \qquad (1 \text{ балл})$$

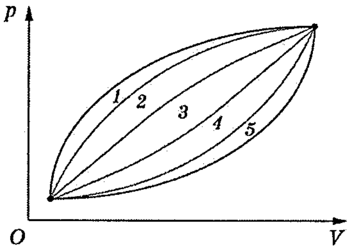
2) В случае неупругого столкновения из закона сохранения импульса найдём скорость второго кубика: $m_2\upsilon_0=\left(m_1+m_2\right)\upsilon$, или $\upsilon=\upsilon_0\frac{m_2}{m_1+m_2}$. (1 балл)

Кинетическая энергия второго груза в этом случае $E_B=\frac{m_2\upsilon_0^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_2+m_1}\right)^2$. (1 балл)

Отношение энергий $\frac{E_A}{E_B}=\left(\frac{m_2-m_1}{m_2}\right)^2=\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)^2$. (0,5 балла)

Если $m_2=m_1/2$, то $\frac{E_A}{E_B}=1$. (0,5 балла)

Задача 3. Много циклов. Над идеальным газом осуществляют поочерёдно циклы 1, 2, 3, 4, 5, коэффициенты полезного действия которых заданы и равны $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5$. Чему равен КПД цикла $\eta_{\text{общ.}}$, полезная работа которого равна общей работе всех пяти циклов (то есть этот цикл охватывает циклы 1 – 5)?



Ответ: $\eta_{\text{общ}}=1-\left(1-\eta_1\right)\left(1-\eta_2\right)\left(1-\eta_3\right)\left(1-\eta_4\right)\left(1-\eta_5\right)$.

Возможное решение и критерии оценивания.

По определению КПД тепловой машины $\eta=1-\frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}}$. (1 балл)

Здесь $Q_{\text{н}}$ - теплота, полученная машиной от нагревателя, $Q_{\text{х}}$ - теплота, переданная холодильнику.

Запишем выражения для КПД всех пяти циклов:

$$\eta_1=1-\frac{Q_{\text{х},1}}{Q_{\text{н},1}};\ \eta_2=1-\frac{Q_{\text{х},2}}{Q_{\text{н},2}};\ \eta_3=1-\frac{Q_{\text{х},3}}{Q_{\text{н},3}};\ \eta_4=1-\frac{Q_{\text{х},4}}{Q_{\text{н},4}};\ \eta_5=1-\frac{Q_{\text{х},5}}{Q_{\text{н},5}}. \qquad (1)$$

Заметим, что $Q_{x,i} = Q_{н,i+1}$. (2 балла)

С учётом этого замечания, запишем $1-\eta_i = \frac{Q_{\text{х,i}}}{Q_{\text{н,i}}} = \frac{Q_{\text{х,i}}}{Q_{\text{х,i-1}}}$.

Для всех циклов:

$$1-\eta_1 = \frac{Q_{\text{х,1}}}{Q_{\text{н,1}}};\ 1-\eta_2 = \frac{Q_{\text{х,2}}}{Q_{\text{н,2}}} = \frac{Q_{\text{х,2}}}{Q_{\text{х,1}}};\ 1-\eta_3 = \frac{Q_{\text{х,3}}}{Q_{\text{н,3}}} = \frac{Q_{\text{х,3}}}{Q_{\text{х,2}}};\ 1-\eta_4 = \frac{Q_{\text{х,4}}}{Q_{\text{н,4}}} = \frac{Q_{\text{х,4}}}{Q_{\text{х,3}}};\ 1-\eta_5 = \frac{Q_{\text{х,5}}}{Q_{\text{н,5}}} = \frac{Q_{\text{х,5}}}{Q_{\text{х,4}}}.$$

Для общего цикла $\frac{Q_{\text{х,5}}}{Q_{\text{н,1}}} = 1-\eta_{\text{общ}}$. (1 балл)

Перемножая левые части и правые части уравнений, получим:

$$(1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)(1-\eta_4)(1-\eta_5) = \frac{Q_{\text{х,1}}}{Q_{\text{н,1}}}\frac{Q_{\text{х,2}}}{Q_{\text{х,1}}}\frac{Q_{\text{х,3}}}{Q_{\text{х,2}}}\frac{Q_{\text{х,4}}}{Q_{\text{х,3}}}\frac{Q_{\text{х,5}}}{Q_{\text{н,4}}} = \frac{Q_{\text{х,5}}}{Q_{\text{н,1}}} = 1-\eta_{\text{общ}}.$$ (1 балл)

Или $\eta_{\text{общ}} = 1-(1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3)(1-\eta_4)(1-\eta_5)$. (1 балл)

Задача 4. На подводной лодке. При 20°C влажность воздуха на подводной лодке $\varphi_1 = 54\%$. В диапазоне температур от 25°C до 5°C изменение температуры на 5°C приводит к изменению давления насыщенных паров в $\alpha = 1{,}38$ раза. Какой будет влажность φ_2 в лодке, если температура понизится до 10°C?

Ответ: $\varphi(10^\circ C) = 99\%$.

Возможное решение и критерии оценивания.

Пусть $p_{\text{н}}(20^\circ)$ – давление насыщенных паров при 20 ^{0}C. Давление паров на подводной лодке при 20^0 равно $p(20^\circ) = p_{\text{н}}(20^\circ)\varphi_1$. (1 балл)

Давление насыщенных паров при 10^0 равно $p_{\text{н}}(10^\circ) = \frac{p_{\text{н}}(20^\circ)}{(1{,}38)^2}$. (1 балл)

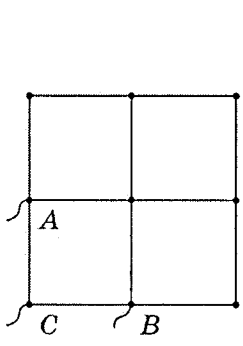
Так как пар в лодке не насыщенный, то его можно считать идеальным газом. При понижении температуры до 10^0 давление паров понизится до

$$p(10^\circ) = p(20^\circ)\frac{t(10^\circ)}{t(20^\circ)}.$$ (2 балла)

Теперь влажность воздуха окажется

$$\varphi_2 = \frac{p(10^\circ)}{p_{\text{н}}(10^\circ)} = \frac{\varphi_1 p_{\text{н}}(20^\circ)}{\frac{p_{\text{н}}(20^\circ)}{(1{,}38)^2}}\frac{t(10^\circ)}{t(20^\circ)} = \varphi_1\frac{t(10^\circ)}{t(20^\circ)}(1{,}38)^2 \approx 99\%.$$ (2 балла)

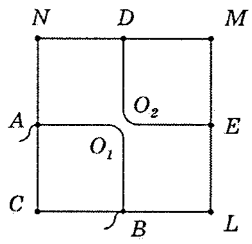
Задача 5. Сетка. Электрическая цепь состоит из 12 элементов, соединённых так, как показано на рисунке. Сопротивление каждого из элементов $R = 24$ Ом.



1) Вычислите эквивалентное сопротивление цепи R_{AB} между зажимами A и B.
2) Вычислите эквивалентное сопротивление цепи R_{AC} между зажимами A и C.

Ответ: $R_{\text{AB}} = 20$ кОм; $R_{\text{AC}} = 17$ кОм.

Возможное решение и критерии оценивания.

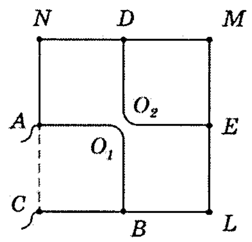


1) Выполним разрыв цепи в точке O так, как показано на рисунке. Точки O_1 и O_2 – эквипотенциальны, т.е. разрыв цепи не изменил эквивалентное сопротивление цепи. (1 балл)

В таком случае $R_{A,N,L,B} = 2R + \dfrac{2R\cdot 2R}{2R+2R} + 2R = 5R.$ (1 балл)

Поскольку $R_{A,O_1,B} \parallel R_{A,C,B}$, то $R_{A,O_1(C),B} = \dfrac{2R\cdot 2R}{2R+2R} = R$.

Искомое сопротивление $R_{AB} = 5R \parallel R = \dfrac{5}{6}R = 20$ кОм. (1 балл)



2) Величина сопротивления $R_{A,N,D,E,L,B} = 5R$. (1 балл)

Параллельно ему включено сопротивление $R_{A,O_1,B} = 2R$.

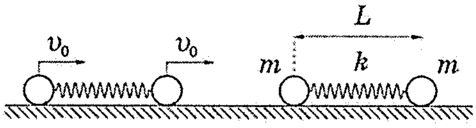
Их эквивалентное сопротивление $R_{AOB} = \dfrac{5R\cdot 2R}{7R} = \dfrac{10}{7}R$. (1 балл)

А последовательно этому эквивалентному сопротивлению включен резистор сопротивлением R. В итоге мы получим сопротивление $R_{ABC} = \dfrac{10}{7}R + R = \dfrac{17}{7}R$.

Сопротивление $R_{AC} = \dfrac{17R}{7}\dfrac{R}{\dfrac{17R}{7}+R} = \dfrac{17}{24}R = 17$ кОм. (2 балла)

11 класс

Задача 1. Столкновение систем. Некоторая система состоит из двух шариков одинаковой массы m, находящихся друг от друга на расстоянии L и соединённых пружиной жёсткости k. Она движется по гладкому горизонтальному жёлобу со скоростью υ_0 так, что пружина не деформирована. На пути этой системы покоится другая такая же система. Происходит абсолютно упругое столкновение шариков. С какой скоростью будет двигаться центр масс первой и второй системы после того, как их центры масс удалятся друг от друга на расстояние $4L$?



Будут ли при этом колебаться шарики в каждой из систем?

Если да, то с какой амплитудой?

Ответ: $\upsilon_1 = 0$; $\upsilon_2 = \upsilon_0$; колебаний не будет.

Возможное решение и критерии оценивания. Перейдём в систему центра масс двух систем. В ней системы движутся навстречу друг другу со скоростью $\upsilon_0/2$. (2 балла)

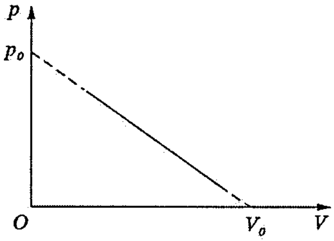
Сразу после столкновения шариков центр масс каждой из систем окажется в покое, а шарики в каждой из систем начнут сближаться со скоростью $\upsilon_0/2$. (1 балл)

С течением времени пружины сожмутся настолько, что шарики остановятся, а затем, начнут расходится. В момент, когда ближайшие шарики двух систем столкнутся, пружина окажется недеформированной. (1 балл)

Столкновение шариков приведёт к тому, что они обменяются импульсами и в итоге, окажется, что системы начнут разъезжаться со скоростью $\upsilon_0/2$. (1 балл)

Вернёмся в лабораторную систему. В ней та система, которая двигалась, окажется в покое, а покоящаяся система, поедет со скоростью υ_0. (1 балл)

Задача 2. Теплоёмкость. Над молем идеального многоатомного газа (метана) осуществляют процесс, в ходе которого давление линейно зависит от объема. Давление $p_0 = 10^5$ Па, объем $V_0 = 100$ л. Теплоёмкость $C_V = 3R$; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



1) Какова максимальная температура газа в этом процессе?

2) К какому значению стремится теплоёмкость метана в данном процессе при стремлении объема к нулю?

Ответ: $T_{\max} = \dfrac{p_0 V_0}{4R} = 300$ К; $\lim\limits_{V\to 0} C \to C_p = C_V + R = 4R \approx 33$ Дж/(моль·К).

Возможное решение и критерии оценивания. Уравнение прямой имеет вид:

$$p = p_0\left(1 - \frac{V}{V_0}\right). \qquad \text{(1 балл)}$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует: $T = \dfrac{pV}{R} = \dfrac{p_0 V_0}{R}\left(\dfrac{V}{V_0} - \dfrac{V^2}{V_0^2}\right)$.

Это парабола ветви которой направлены вниз.

Функция достигает максимума при $V = V_0/2$. Максимальная температура

$$T_{\max} = \frac{p_0 V_0}{4R}. \qquad \text{(1 балл)}$$

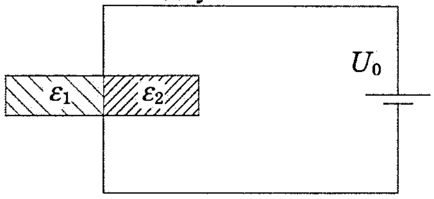
По определению теплоемкость $C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT} = C_V + \frac{pdV}{dT}$. (1 балл)

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует: $RdT = pdV = Vdp$. (1 балл)

Тогда $C = \frac{\delta Q}{dT} = C_V + R\frac{pdV}{pdV + Vdp} = C_V + R\frac{1}{1+\frac{V}{p}\left(\frac{dp}{dV}\right)} = C_V + R\frac{1}{1-\frac{V}{p}\frac{p_0}{V_0}}$. (1 балл)

При $V \to 0$ получим $C = C_V + R = C_p$. (1 балл)

Задача 3. Конденсатор с диэлектриками. Плоский конденсатор подключен к батарее с ЭДС, равной U_0. Весь объем внутри конденсатора заполнен двумя пластинами одинакового размера с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Площадь обкладок конденсатора равна S, расстояние между обкладками d, причём $d \ll \sqrt{S}$.



1) найдите заряд Q на верхней обкладке конденсатора.

2) Определите работу A внешней силы, которую нужно совершить для медленного удаления пластины с ε_1 из конденсатора.

Ответы: 1) $Q = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 S U_0}{2d}$; 2) $A = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)SU_0^2}{4d}$.

Возможное решение и критерии оценивания. Составной конденсатор можно представить в виде двух параллельно соединённых конденсаторов. Электрическая емкость составного конденсатора равна: $C_0 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 S}{2d}$. (1 балл)

На верхней обкладке конденсатора накопится заряд

$$Q_0 = C_0 U_0 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 S U_0}{2d}. \qquad \text{(1 балл)}$$

Чтобы найти работу A по медленному удалению пластины с ε_1 из конденсатора, воспользуемся законом сохранения энергии: $\Delta W = A + U_0 \Delta Q$. (1 балл)

Здесь $U_0 \Delta Q$ - работа батареи по переносу заряда.

Найдём ΔW: $\Delta W = \frac{C_{0,1}U_0^2}{2} - \frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{(1-\varepsilon_1)\varepsilon_0 S U_0^2}{4d}$. (1 балл)

Найдём работу батареи:

$$U_0 \Delta Q = U_0\left(\frac{(1+\varepsilon_2)\varepsilon_0 S U_0}{2d} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 S U_0}{2d}\right) = \frac{(1-\varepsilon_1)\varepsilon_0 S U_0^2}{2d}. \qquad \text{(1 балл)}$$

Искомая работа $A = \Delta W - U_0 \Delta Q = \frac{(\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 S U_0^2}{4d}$. (1 балл)

Примечание. Часто работу A приравнивают изменению энергии конденсатора ΔW, что неверно. Без учёта работы батареи за решение задачи ставить не более 3 баллов.

Задача 4. Электромагнитное торможение. Однородный несжимаемый диэлектрический стержень массы m и длины L имеет заряд q, равномерно распределённый по его длине. Стержень целиком находится в первой половине ствола электромагнитной пушки. Длина ствола $2L$. Коэффициент трения между стержнем и стволом равен μ. Система помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси пушки. Индукция поля равна B. Пушка сообщает цилиндру начальную скорость v_0 .

С какой скоростью υ_1 он вылетит из пушки, если трение существует только в первой половине ствола? Влияние силы тяжести не учитывать.

Ответ: $\upsilon_1 = \upsilon_0 - \dfrac{\mu q B L}{2m}$

Возможное решение и критерии оценивания. Пусть заряженный стержень сместился на расстояние x. Сила Лоренца прижимает стержень к стенке. Величина этой силы:

$$F_A = q\upsilon B. \qquad \text{(1 балл)}$$

Сила трения, тормозящая стержень, действует на ту часть стержня, которая находится в первой половине ствола пушки и связана с силой Лоренца формулой

$$F_{\text{тр}} = -\mu\left(q\frac{L-x}{L}\right)\upsilon B. \qquad \text{(2 балла)}$$

Запишем второй закон ньютона применительно к стержню:

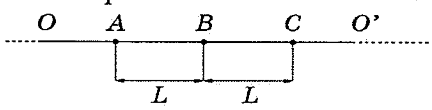
$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -\mu\left(q\frac{L-x}{L}\right)\upsilon B = -\mu\left(q\frac{L-x}{L}\right)\frac{dx}{dt}B. \qquad \text{(1 балл)}$$

Преобразуем данное уравнение к виду, удобному для интегрирования:

$$d\upsilon = -\frac{\mu q B}{mL}(L-x)\,dx. \qquad \text{(1 балл)}$$

После интегрирования получим: $\upsilon_1 - \upsilon_0 = -\dfrac{\mu q B L}{2m}$ или $\upsilon_1 = \upsilon_0 - \dfrac{\mu q B L}{2m}$. (1 балл)

Задача 5. Многоточие. При разборе архива Снеллиуса на глаза специалистам попался небольшой рисунок с тремя точками A, B и C, лежащими на прямой OO'. Расстояние $AB = BC = L$. Из комментария к рисунку следовало, что прямая OO' - главная оптическая ось тонкой линзы, а точки A, B и C обладают любопытным свойством: при помещении точечного источника света в одну из них изображение оказывается в одной из двух других точек. Определите:



1) о собирающей или рассеивающей линзе идёт речь;
2) чему равно фокусное расстояние f линзы.

Ответ: линза собирающая; 2) фокусное расстояние линзы $f = \dfrac{4}{9}L$.

Возможное решение и критерии оценивания. Условию задачи ($AB = BC = L$) может удовлетворить только собирающая линза. Причём одно из изображений должно быть мнимым, другое – действительным. (1 балл)

Пусть источник размещён в точке A, а линза – между точками B и C. Пусть расстояние от точки B до линзы равно x, а фокусное расстояние линзы f.

Воспользуемся формулой тонко линзы: $\dfrac{1}{L+x} + \dfrac{1}{L-x} = \dfrac{1}{f}$. (1 балл)

Пусть источник размещён в точке B, а линза по-прежнему находится между точками B и C. Воспользуемся формулой тонко линзы: $\frac{1}{x}-\frac{1}{L+x}=\frac{1}{f}$. (1 балл)

Приравняв два последних уравнений друг другу и исключив f получим:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{L+x}=\frac{1}{f}=\frac{1}{L+x}+\frac{1}{L-x}\Rightarrow 3x^2+2Lx-L^2=0$. (1 балл)

Решая квадратное уравнение получим: $x=L/3$. (1 балл)

Подставив найденное значение x в любое их первых двух уравнений найдём фокусное расстояние: $f=4L/9$. (1 балл)